23-5-2016 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ Ερμητιανός χώρος λέγεται ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με ένα μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο : $V \times V \to \mathbb{C}$
$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \to \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$, τέτοια ώστε:

1. $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \overline{\langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle}$ $\qquad \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$
2. $\langle \lambda\vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \lambda \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$ $\qquad \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$
3. $\langle \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\alpha}_1, \vec{\beta} \rangle + \langle \vec{\alpha}_2, \vec{\beta} \rangle$ $\qquad \lambda \in \mathbb{C}$
4. Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle > 0$

→ σέβεται το βαθμ. $\in \mathbb{R}$ πολ/σμό μόνο ως προς την πρώτη συντεταγμ.

$$\langle \vec{\alpha}, \lambda\vec{\beta} \rangle \overset{①}{=} \overline{\langle \lambda\vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle} \overset{②}{=} \overline{\lambda \langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle} = \bar{\lambda} \overline{\langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle}$$
$$= \bar{\lambda} \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$$

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 \rangle \overset{①}{=} \overline{\langle \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2, \vec{\alpha} \rangle} = ③ = \overline{\langle \vec{\beta}_1, \vec{\alpha} \rangle + \langle \vec{\beta}_2, \vec{\alpha} \rangle}$$
$$= \overline{\langle \vec{\beta}_1, \vec{\alpha} \rangle} + \overline{\langle \vec{\beta}_2, \vec{\alpha} \rangle} = \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta}_1 \rangle + \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta}_2 \rangle$$

Σέβεται το άθροισμα και ως προς την πρώτη και ως προς τη δεύτερη συντεταγμένη

Κανονικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^n$
(ή απλές εσωτερικό γινόμενο)

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

$(z_1, z_2, \ldots z_n), (w_1, w_2, \ldots w_n) \to \langle (z_1, z_2, \ldots z_n), (w_1$
$= z_1 \cdot \overline{w_1} + z_2 \cdot \overline{w_2} + \ldots + z_n \cdot \overline{w_n}$

1) $\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \ldots + z_n \cdot \overline{w_n}$
$\langle w, z \rangle = w_1 \cdot \overline{z_1} + w_2 \cdot \overline{z_2} + \ldots + w_n \cdot \overline{z_n}$
$\overline{\langle w, z \rangle} = \overline{w_1 \cdot \overline{z_1} + w_2 \cdot \overline{z_2} + \ldots + w_n \cdot \overline{z_n}}$
$= \overline{w_1} \cdot z_1 + \overline{w_2} \cdot z_2 + \ldots + \overline{w_n} \cdot z_n$
$= \langle z, w \rangle$ (όπως ισχύει η 1η)

2) $\langle \lambda z, w \rangle = \langle (\lambda \cdot z_1, \lambda \cdot z_2, \ldots \lambda \cdot z_n), (w_1, w_2, \ldots w_n$
$= \lambda z_1 \overline{w_1} + \lambda z_2 \cdot \overline{w_2} + \ldots + \lambda \cdot z_n \cdot \overline{w_n} =$
$= \lambda (z_1 \cdot \overline{w_1} + z_2 \cdot \overline{w_2} + \ldots + z_n \overline{w_n}) =$
$= \lambda \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle = z_1 \overline{w_1} + z_2 \cdot \overline{w_2} + \ldots + z_n \overline{w_n}$

$\underbrace{(z_1, z_2, \ldots, z_n)}_{z}, \underbrace{(w_1, w_2, \ldots, w_n)}_{w} \to \langle (z_1, z_2, \ldots z_n)(w$

3) $\langle \vec{z} + \vec{z'}, \vec{w} \rangle = \langle (z_1, z_2, \ldots z_n) + (z'_1, z'_2, \ldots z'_n), (w_1, w_2$
$= \langle (z_1 + z'_1, z_2 + z'_2, \ldots z_n + z'_n), (w_1, w_2$
$= (z_1 + z'_1) \overline{w_1} + (z_2 + z'_2) \overline{w_2} + \ldots + (z_n + z'_n$
$= z_1 \overline{w_1} + z'_1 \cdot \overline{w_1} + \ldots + z_n \cdot \overline{w_n} + z'_n \overline{w_n}$
$= z_1 \cdot \overline{w_1} + z_2 \cdot \overline{w_2} + \ldots + z_n \overline{w_n} + z'_1 \cdot \overline{w_1} +$
$\langle \vec{z}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{z'}, \vec{w} \rangle$

4) Έστω $\vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$

$$\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = \langle (z_1, z_2, \ldots z_n), (z_1, z_2, \ldots z_n) \rangle$$
$$= z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + \ldots + z_n \cdot \bar{z}_n$$
$$= \underbrace{|z_1|^2} + \underbrace{|z_2|^2} + \ldots + \underbrace{|z_n|^2} \in \mathbb{R}, \geq 0$$

Μήκος Διανύσματος: $\|\vec{\alpha}\| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}$

$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ κάθετα $(\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}) \Leftrightarrow \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0$

& $\langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle = \overline{\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle} = \bar{0} = 0.$

(1) ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8

Στο $\mathbb{C}^3$ εφοδιασμένο με το σύνηθες μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο, βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου V που παράγεται από τα διανύσματα $(1,1,i)$ και $(0,i,-1)$.

$\vec{\alpha}_1 = (1,1,i) \quad \vec{\alpha}_2 = (0,i,-1)$

$\vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}_1 = (1,1,i)$

$$\vec{\beta}_2 = \vec{\alpha}_2 - \frac{\langle \vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_1 \rangle}{\langle \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_1 \rangle} \vec{\beta}_1 = (0,i,-1) - \frac{\langle (0,i,-1), (1,1,i) \rangle}{\langle (1,1,i), (1,1,i) \rangle} \cdot (1,1,i)$$

$$= (0,i,-1) - \frac{\langle (0,i,-1), (1,1,i) \rangle}{\langle (1,1,i), (1,1,i) \rangle} \cdot (1,1,i)$$

$$\vec{b_2} = (0, i, -1) - \frac{i + i}{3}(1, 1, i) =$$

$$= (0, i, -1) - \frac{2i}{3}(1, 1, i) =$$

$$= (0, i, -1) - \left(\frac{2i}{3}, \frac{2i}{3}, \frac{-2}{3}\right) =$$

$$= \left(-\frac{2i}{3}, \frac{i}{3}, -\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \left\langle (1, 1, i), \left(-\frac{2i}{3}, \frac{i}{3}, -\frac{1}{3}\right) \right\rangle =$$

$$= \frac{2i}{3} - \frac{i}{3} - \frac{i}{3} = 0.$$

$$\|\vec{b_1}\| = \sqrt{\langle (1, 1, i), (1, 1, i) \rangle} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{b_2}\| = \sqrt{\left\langle \left(-\frac{2i}{3}, \frac{i}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{2i}{3}, \frac{i}{3}, -\frac{1}{3}\right) \right\rangle} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\vec{\gamma_1} = \frac{\vec{b_1}}{\|\vec{b_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, i)$$

$$\vec{\gamma_2} = \frac{1}{\|\vec{b_2}\|} \cdot \vec{b_1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\frac{-2i}{3}, \frac{i}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Άρα $\vec{\gamma_1}, \vec{\gamma_2}$ ορθοκανονική βάση του χώρου V

ΟΡΙΣΜΟΣ $(=a_{ij})$

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, τότε:

i) ο πίνακας $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ λέγεται συζυγής πίνακας του A

παράδειγμα: Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 3+i \\ 0 & 4-i & 2i \\ 0 & 7i & 15 \end{pmatrix}$, τότε ο

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 3-i \\ 0 & 4+i & -2i \\ 0 & -7i & 15 \end{pmatrix}$$

ii) ο πίνακας $A^* = \overline{A}^t$ λέγεται ανάστροφοσυζυγής του A (οι γραμμές γίνονται στήλες στον ανάστροφο)

$$A^* = \overline{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2i & 4+i & -7i \\ 3-i & -2i & 15 \end{pmatrix}$$

iii) ο πίνακας A ονομάζεται μοναδιαίος αν είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $A^{-1} = A^*$

$A^* A = I_n = A \cdot A^*$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \overline{a_{2n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{n1}} & \overline{a_{n2}} \dots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$\overline{A}^t = A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \overline{a_{n1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \overline{a_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \dots \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{A μοναδιαίος} \quad A^* A = I_n}$

$$A^*A = I_n, \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{n2} \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

* Αν οι στήλες είναι ορθοκανονική βάση & διάστ. του χώρου (είναι ορθογώνιος → μοναδιαίος)

iv) Ο πίνακας A ονομάζεται ερμητιανός αν $A^* = A$

• ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΡΜΗΤΙΑΝΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Για κάθε ερμητιανό πίνακα A υπάρχει μοναδιαίος πίνακας P τέτοιος ώστε $\underbrace{P^{-1}AP}_{\cancel{P^*AP}} = \Delta$, όπου Δ διαγώνιος πίνακας.

(v) Κάθε ερμητιανός πίνακας είναι διαγωνίσιμος και υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n\times 1}$, που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα.

- **ΟΡΙΣΜΟΣ**

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγεται κανονικός αν $AA^* = A^*A$

- **ΘΕΩΡΗΜΑ**

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχει μοναδιαίος (αντίστοιχος του ορθογώνιου στον ευκλείδειο χώρο) πίνακας $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε P^*AP να είναι διαγώνιος.

- Κάθε συμμετρικός πραγματικός πίνακας είναι κανονικός.

$$AA^* = AA^t = A^2 = A^tA = A^*A$$

- Κάθε ερμιτιανός πίνακας είναι κανονικός

$(A = A^*)$ $(AA^* = AA = A^*A)$

- Κάθε ορθογώνιος πραγματικός πίνακας είναι κανονικός. $A^tA = I_n = AA^t$

$$AA^* = AA^t = I_n = A^tA = A^*A$$

- **ΟΡΙΣΜΟΣ** Κάθε μοναδιαίος είναι κανονικός